学校编码：10384　　　　分类号＿＿＿＿ 密级＿＿＿＿

学号：B200423012　　　　UDC＿＿＿＿

厦门大学

博 士 学 位 论 文

分数阶常微分方程的高阶多步法和变分数阶扩散方程的数值方法

High Order Multiple Method for Fractional Ordinary Differential Equation and Numerical Method for Variable Order Fractional Diffusion Equation

林　然

指导教师姓名：刘　发　旺　教授

专 业 名 称：计　算　数　学

论文提交日期：2007　年　　月

论文答辩日期：2007　年　　月

学位授予日期：2007　年　　月

答辩委员会主席：＿＿＿＿＿＿

评　　阅　　人：＿＿＿＿＿＿

二〇〇七年五月

厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考的其他个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明。本人依法享有和承担由此论文产生的权利和责任。

声明人（签名）：

年　月　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人完全了解厦门大学有关保留、使用学位论文的规定。厦门大学有权保留并向国家主管部门或其指定机构送交论文的纸质版和电子版，有权将学位论文用于非赢利目的的少量复制并允许论文进入学校图书馆被查阅，有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索，有权将学位论文的标题和摘要汇编出版。保密的学位论文在解密后适用本规定。

本学位论文属于

1、保密 （ ），在 年解密后适用本授权书。

2、不保密（ ）

作者签名： 日期： 年 月 日

导师签名： 日期： 年 月 日

摘 要

分数微积分的出现已有300多年的历史,它的应用领域很广，包含各种材料的记忆、力学和电特性描述、地震分析、电力分形网络、分数阶正弦振荡器、机器人、电子电路、电解化学、分数电容理论、电极电解质接口描述、分形理论，特别是描述自相似和多孔结构的动态过程、分数阶控制器设计、弹粘性系统和柔软构造物体的振动控制、分数阶生物神经元和概率论等。分数阶微分方程的特点是含有非整数阶导数，能非常有效的描述各种各样的物质的记忆和遗传性质，在工程，物理，金融，水文等领域发挥越来越重要的作用。

这篇文章主要由下面几个部分组成。

绪言部分介绍了关于分数阶微积分的一些预备知识，给出了分数阶微积分一些基本定义和性质。

接下来的第二章中，首先从基本的分数阶常微分方程出发，对Lubich提出的一个关于分数阶导数的高阶近似，将其应用于分数阶微分方程，构造高阶数值差分格式来进行分数阶微分方程的数值求解，并在理论上给出这一算法的误差分析，证明了它的相容性，收敛性和稳定性。

第三章对于一个推广到分数阶的松弛方程，直接利用Grünwald-Letnikov分数阶导数定义进行离散，得到分数阶松弛方程一个数值方法，并给出了相容性，收敛性和稳定性的证明。

在第四章中，进一步的考虑更复杂的非线性分数阶常微分方程，同样利用的是Lubich提出分数阶导数的高阶近似，构造相应的数值格式，并给出这一算法的误差分析，即相容性，收敛性和稳定性的证明。

第五章考虑变分数阶的微分方程，在近来提出的一些模型中，分数阶导数的阶数会随着时间或空间的变化而变化，因此在最后一章中我们讨论基于Riesz分数阶导数的一类变分数阶扩散方程，给出求解这样一个方程的一个数值方法，并对其相容性，收敛性和稳定性进行了证明。

关键词：分数阶方程；高阶多步法；变分数阶；

Abstract

Fractional calculus has a history of 300 years, its application is very broad,including the memory of many kinds of material,characterization of mechanics and electricity,earthquake analysis, robots,electric fractal network,fractional sine oscillator,Robot, electronic circuits, electrolysis chemical,fractional capacitance theory,electrode electrolyte interface description, fractal theory, especially in the dynamic process description of porous structure ,fractional controller design, vibration control of viscoelastic system and pliable structure objects, fractional biological neurons and probability theory ,etc. The characteristic of fractional order differential equation is containing the non-integer order derivative. It can effectively describe the memory and transmissibility of many kinds of material, and plays an increasingly important role in engineering, physics, finance, hydrology and other fields.

This thesis consists of the four chapters.

Introduction gives some concerning fractional calculus to prepare the knowledge and present basic definitions and properties of fractional calculus.

In Chapter 2, starting from the basic fractional ordinary differential equations,we apply a high order approximation of fractional derivative advanced by Lubich to fractional differential equation, construct a high numerical difference scheme to solve the fractional differential equation, present error analysis of the algorithms theoretically, and prove the consistency ,convergency and stability.

In Chapter 3, considering fractional relaxation equation, we make use of directly the Grunwald-Letnikov definition to discrete fractional derivative, obtain a numerical method of fractional relaxation equation,and give the proof of consistency ,convergency and stability.

In Chapter 4, we consider more complex fractional nonlinear differential equation ,also using the high order approximation presented by Lubich to construct corresponding numerical scheme and giving the error analysis of the algorithms.

In Chapter 5, noticing that recently in some models the order of fractional derivative can variety with time or space, we discussed variable order fractional diffusion equation based on Riesz fractional derivative. We presented a numerical method to solve this kind of equation,and prove its consistency,convergency and stability.

Key words: fractional differential equation; high order multiple method; variable order fractional diffusion equation;

目 录

Contents